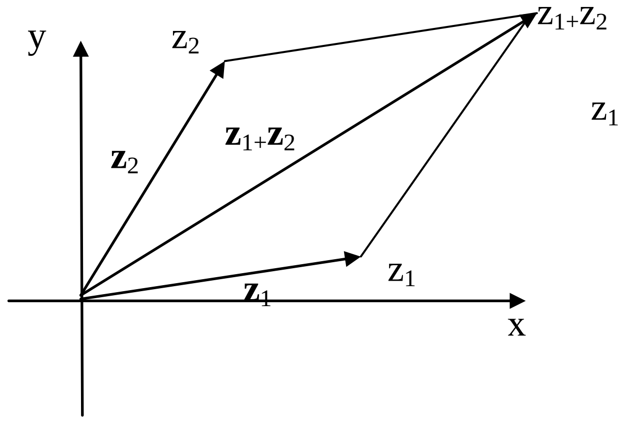
2 КОМПЛЕКС САНДАР АМАЛДАРЫНЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ МАҒЫНАСЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ДӘРЕЖЕЛЕУ

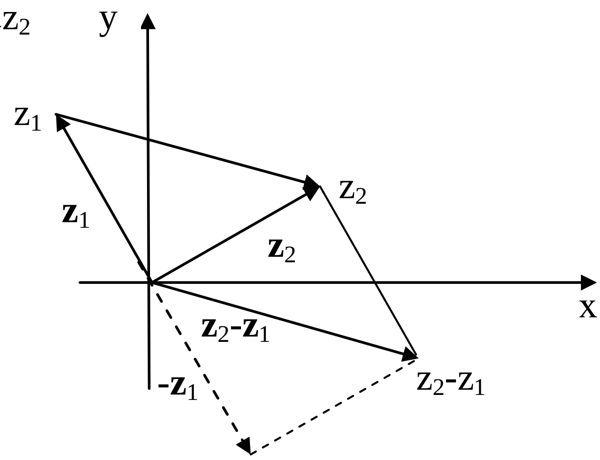
2.1 Комплекс сандарға қолданылатын арифметикалық амалдардың геометриялық мағынасы

Комплекс z_1 мен z_2 сандарының қосындысына геометриялық талдау жасау үшін олардың векторлық кескіндерін қарастырамыз. Сонда z_1+z_2 қосындысына векторларды қосудың параллелограмм ережесі бойынша $\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2$ векторы сәйкес келеді (3-сурет).

Сол сияқты z_2-z_1 санына $\mathbf{z}_2-\mathbf{z}_1$ векторы сәйкес келеді (4-сурет).



3-сурет



4-сурет

3 және 4 суреттерінен, үшбұрыштың қабырғасының ұзындығы басқа екі қабырғаларының ұзындықтарының қосындысынан артық емес, ал айырмасының модулінен кем емес екенін ескерсек,

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n| \le |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|,$$

$$|z_1-z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$$

теңсіздіктерін аламыз.

4-суреттен $\mathbf{z}_2-\mathbf{z}_1$ векторының ұзындығы z_1, z_2 нүктелерінің ара қашықтығына тең екенін көреміз, олай болса $|z_2-z_1|$ саны z_1, z_2 сандарының ара қашықтығын береді.

Енді комплекс сандардың көбейтіндісі мен қатынасына тоқталайық.

$$z_1 = |z_1|\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = |z_2|\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

сандарының көбейтіндісін қарастырсақ

$$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right), \qquad (2.1)$$

теңдігін аламыз.

Бұдан мынадай қорытынды шығады:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2, \tag{2.2}$$

яғни екі комплекс санның көбейтіндісінің модулі олардың модульдерінің көбейтіндісіне тең, ал аргументі көбейткіштерінің аргументтерінің қосындысына тең.

(1.8) теңдігінің негізінде (2.1) теңдігі көрсеткіштік пішінде

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} \cdot |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

түрінде жазылады.

Комплекс сандардың векторлық кескіндерін қарастырсақ $z_1 z_2$ көбейтіндісінің векторы $\mathbf{z}_1$ векторын $\arg z_2$ бұрышына бұру және $|z_2|$ «есе ұзарту» арқылы алынады деп айта аламыз. Егер $\arg z_2$ оң болса бұру бағыты сағат тіліне қарама-қарсы, ал теріс болса сағат тілімен бағыттас болады. $|z_2| = 1$ болғанда, z_2 санына көбейту $\mathbf{z}_1$ векторын тек бұруға, ал $\arg z_2 = 0$ болғанда тек «ұзартуға» әкеледі.

Мысал үшін i санына көбейтуге 90° –қа бұру, 3 санына көбейтуге 3 есе ұзарту сәйкес келеді.

Жоғарғыдағы (2.2) теңдіктері комплекс көбейткіштердің кез келген сандарынының $z_1\, z_2 \ldots z_n$ көбейтіндісі жағдайына да таралады:

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2 \ldots z_n) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2 + \ldots + \mathrm{Arg} z_n. \tag{2.3}$$

(2.3) формулаларынан $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ жағдайында келесі теңдіктер шығады:

$$|z^n| = |z|^n, \quad \mathrm{Arg} z^n = n \cdot \mathrm{Arg} z, \tag{2.4}$$

Енді z_1, z_2 сандарының қатынасын қарастырсақ ($z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \tag{2.5}$$

теңдігін аламыз. Бұдан

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2, \qquad (2.16)$$

яғни екі комплекс санның қатынасының модулі олардың модульдерінің қатынасына тең, ал осы екі санның қатынасының аргументі бөлінгіш пен бөлгіштің аргументтерінің айырымына тең екендігі шығады.

Сонымен, қатынастың векторы да бөлінгіштің векторын «ұзарту» мен бұру арқылы алынатыны шықты.

(2.5) теңдігі көрсеткіштік пішінде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

түрінде жазылады.

2.2 Комплекс сандарды дәрежелеу, олардың түбірлерін табу

z - комплекс, n - натурал сандар болсын. z санын n дәрежеге шығару, яғни z^n санын табу есебін қарастырамыз.

Егер z саны $z = x + iy$ алгебралық түрінде жазылса, онда үлкен n натурал сандары үшін $z^n = (x + iy)^n$ дәрежесін табу ұзақ есептеулерді қажет етеді.

Егер біз z санының $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ тригонометриялық түріне көшсек

$$z^n = \left(|z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n$$

теңдігін аламыз. Бұдан (2.4) теңдіктерінің негізінде *Муаврдың* дәрежелеу есебін шешуді жеңілдететін

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (2.7)$$

формуласын аламыз.

Көрсеткіштік түрде бұл формула

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} \qquad (2.8)$$

түрінде жазылады.

Анықтама 9. Егер

$$w^n = z$$

теңдігі орынды болса, онда w комплекс саны z комплекс санының *n дәрежелі түбірі* деп аталады *(n=2,3,4,...)*. z санының n дәрежелі түбірі $\sqrt[n]{z}$ түрінде белгіленеді, яғни

$$w = \sqrt[n]{z}\,.$$

Мысал үшін $i^2 = -1$ және $(-i)^2 = -1$ болғандықтан, анықтама бойынша, i саны да $(-i)$ саны да (-1) санының 2 дәрежелі түбірі болады. Бұл мысалдан комплекс санның түбірінің көпмәнді болатыны шығады.

Енді $w = \sqrt[n]{z}$ түбірінің барлық мәндерін табу есебін қарастырайық.

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ және $\sqrt[n]{z} = w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ болсын деп ұйғаралық. Онда $w^n = z$ болғандықтан

$$|w|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

теңдігі орындалады. Бұл теңдіктен

$$|w|^n = |z|,\ n\theta = \varphi + 2k\pi\ ,\quad k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

немесе

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}\ \text{ және }\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

болатыны шығады, мұндағы $\sqrt[n]{|z|}$ - $|z|$ нақты санының *n дәрежелі арифметикалық түбірі.*

Сонымен

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,2,... \tag{2.9}$$

формуласын алдық. Бұдан косинус пен синустың 2π - периодты екенін ескерсек,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,2,...,(n-1) \tag{2.10}$$

формуласы шығады. Есептеулерде $\varphi = \arg z$ деп алған қолайлы болады.